

## Çapraz-Tabakalı ve Açılı-Tabakalı Kompozit Konsol Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi

**Mehmet ÇEVİK**

Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir Meslek Yüksekokulu, 35150, Buca, İZMİR  
mehmet.cevik@deu.edu.tr

(Geliş/Received: 27.04.2006; Kabul/Accepted: 17.01.2007)

**Özet:** Bu çalışmada çapraz-tabakalı ve açılı-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizi, sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Çözüm için ANSYS 8.0 yazılım paketinden yararlanılmıştır. Geliştirilen sonlu elemanlar modeliyle hesaplanan doğal frekanslar, literatürde mevcut ve farklı yöntemlerle elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılarak tamamen uyumlu oldukları gösterilmiş; böylece modelin doğrulaması yapılmıştır. Daha sonra, yaygın olarak karşılaşılan ankastre-serbest sınır şartları (konsol kiriş) için tabaka sayısının, boy/kalınlık oranının ve tabaka açılarının düzlem-dışı eğilme titreşimi doğal frekansına etkileri araştırılmıştır. Simetrik ve anti-simetrik diziliş durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Sonuçlar tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** Tabakalı kompozit kiriş, Serbest titreşim, Sonlu eleman yöntemi.

### Free Vibration Analysis of Cross-ply and Angle-ply Laminated Composite Cantilever Beams

**Abstract:** In this study, free vibration analysis of cross-ply and angle-ply laminated composite beams is carried out by finite element method. ANSYS 8.0 software package is used for this purpose. The natural frequencies computed by the finite element model developed are compared with those present in the literature and obtained by other methods. The comparison with the reported values is quite good; therefore, the finite element model used in this study is verified. Subsequently, the effects of number of layers, length-to-thickness ratio and layer orientation angle on the natural frequencies of out-of-plane bending vibrations are investigated for the common clamped-free boundary conditions (cantilever beam). Symmetric and anti-symmetric stacking sequences are examined separately. The results are illustrated in tabular and graphical form.

**Keywords:** Laminated composite beam, Free vibration, Finite element method.

### 1. Giriş

Kompozit malzemeler, sahip oldukları birtakım üstün özellikler nedeniyle, otomotiv, uçak ve uzay sanayiinde, inşaat ve yapı sektörlerinde ve daha birçok alanda yaygın olarak kullanılmaya başlamıştır. Kompozit malzemelerin çeşitli türleri bulunmakta olup bu çalışmada tabakalı kompozit malzemelerle ilgili bir araştırma yapılmıştır. Yüksek mukavemet/ağırlık oranına sahip olan bu malzemeler, ortotropik özelliklere sahip ince tabakaların (lamina) farklı biçim ve açılarla üst üste dizilmeleri ile üretilmektedirler. Dolayısıyla mekanik özellikleri tabakaların diziliş biçimi ve açılarına bağlıdır. Bunun sonucu olarak farklı şartlar ve yükleme koşulları için istenilen özelliklerde üretim yapmak mümkün olmaktadır. Öte yandan anizotropik yapıları nedeniyle, bu

malzemelerin analizi izotropik malzemelere göre daha karmaşık olmaktadır.

Tabakalı kompozit malzemeler, çapraz-tabakalı veya açılı-tabakalı olarak kullanılmaktadır. Çeşitli alanlarda kullanılan bu malzemelerin titreşim davranışlarının incelenmesi de bir zorunluluk haline gelmiştir. Birçok araştırmacı tabakalı kompozitlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Singh ve Abdelnaser [1] keyfi sınır şartlarına sahip simetrik çapraz-tabakalı kompozit kirişlerin serbest ve zorlamalı titreşimlerini araştırmışlardır. Chandrasekhara ve diğ. [2] simetrik çapraz-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimleri için tam çözümler bulmuşlar ve kayma deformasyonu, malzeme anizotropisi ve sınır şartlarının kompozit kirişlerin doğal

frekanslarına etkilerini göstermişlerdir. Khdeir ve Reddy [3] keyfi sınır şartlarına sahip çapraz-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimlerini inceleyerek farklı teorilerle bulunan sonuçları birbirleri ile karşılaştırmışlardır. Yıldırım ve diğ. [4] transfer matrisi yöntemini kullanarak simetrik çapraz-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini yapmışlar; sınır şartları, narinlik oranı, yükseklik genişlik oranı, tabaka sayısı ve malzeme özelliklerinin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Matsunaga [5] açılı-tabakalı kompozit plakların doğal frekanslarını ve burkulma gerilmelerini, kayma gerilmesi, kalınlık değişimi ve dönme ataleti etkilerini dikkate alarak analiz etmiştir.

Yıldırım ve Kıral [6] simetrik çapraz-tabakalı kirişlerin düzlem-dışı serbest titreşimlerini transfer matrisi yöntemiyle çalışmışlar; Timoshenko ve Euler-Bernoulli tipi kirişler için kayma deformasyonu, dönme ataleti, uzunluk/kalınlık oranı, kesitin kalınlık/genişlik oranı ve farklı sınır şartlarının etkilerini araştırmışlardır.

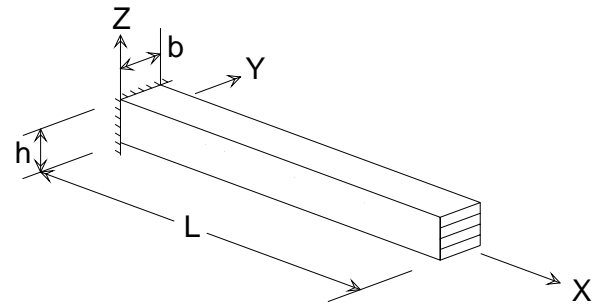
Chakraborty ve diğ. [7] birinci-mertebe kayma deformasyonlu sonlu eleman geliştirerek, bu elemanı simetrik ve asimetrik dizilişe sahip çapraz-tabakalı kompozit kirişlerde serbest titreşim ve dalga yayılımı problemlerine uygulamışlardır; bu çalışmada sayısal örneklerin çoğu çapraz-tabakalı kompozitleri içermekle birlikte, açılı-tabakalı bir örneğe de yer verilmiştir. Subramanian [8] ise yüksek mertebeli kayma deformasyonu teorisi ve buna dayandırılan sonlu elemanlar kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizini yapmış; farklı sınır şartlarında, değişik narinlik oranlarında ve değişik tabaka sayılarına sahip çapraz-tabakalı kirişler için sayısal sonuçlar elde etmiştir.

Bu çalışmada hem çapraz-tabakalı hem de açılı-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizi, sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Çözüm için ANSYS 8.0 yazılım paketinden yararlanılmıştır. Oluşturulan sonlu elemanlar modeli kullanılarak önce literatürde mevcut belli kirişlerin düzlem-dışı serbest titreşim analizi yapılmıştır. Bulunan doğal frekans değerleri, literatürde mevcut sonuçlarla karşılaştırılarak birbirlerine yakınlıkları gösterilmiştir. Daha sonra esas çalışmaya geçilerek, yaygın olarak karşılaşılan ankastre-serbest sınır şartları (konsol

kiriş) için tabakaların diziliş şekli (simetrik veya anti-simetrik) ve açılı, tabaka sayısı ve kirişlerin boy/kalınlık oranlarının doğal frekansa etkileri araştırılmıştır. Çapraz-tabakalı ve açılı-tabakalı diziliş durumlarının etkileri grafiklerle gösterilmiştir. Tabakalı kompozit kirişlerin titreşimlerine dair literatürde mevcut çalışmaların neredeyse tamamı çapraz-tabakalı kirişlerle ilgilidir. Dolayısıyla, bu çalışmanın en özgün yönü, açılı-tabakalı kirişlerin de incelenmesidir.

## 2. Kompozit Kirişin Sonlu Elemanlar Modeli

Bu çalışmada kullanılan kiriş modelinin geometrisi ve koordinat sistemi Şekil 1 'de görülmektedir.  $L$ ,  $h$  ve  $b$ , sırasıyla kirişin boyunu, kalınlığını ve genişliğini ifade etmektedir. Tabakalar,  $xy$ -düzlemine paralel olduğu için, bu düzleme dik olan titreşimler düzlem-dışı olarak tanımlanmıştır.



Şekil 1. Kiriş modelinin geometrisi ve koordinat sistemi

Problemin çözümü için ANSYS 8.0 yazılım paketinden yararlanılmış, doğrusal tabakalı Shell-99 elemanı kullanılmıştır. Shell-99, 8-düğümlü, her düğüm noktasında 6 serbestlik derecesi olan üç-boyutlu bir elemandır. Bu eleman, dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkilerini dikkate alan Timoshenko kiriş teorisine göre hesaplama yapmaktadır. Bu teorinin, kayma deformasyonu etkilerini ihmal eden Bernoulli-Euler kiriş teorisine göre çok daha iyi sonuçlar verdiği birçok araştırmacı [2, 6, 8, 9] tarafından gösterilmiştir.

### 3. Karşılaştırma Yapılarak Modelin Doğrulanması

Bu bölümde, karşılaştırma yapmak amacıyla, literatürde farklı yöntemlerle çözümleri bulunan iki problem seçilmiştir. İlk örnek olarak, bütün tabakaları aynı kalınlık, yoğunluk ve ortotropik malzeme özelliklerine sahip Grafüt-Epoksi (AS4/3501-6) bir kiriş seçilmiştir; tabakaların malzeme özellikleri şu şekildedir:

$$E_1=144.8\text{GPa}, E_2=9.65\text{GPa}, G_{12}=G_{13}=4.14\text{GPa}, \\ G_{23}=3.45\text{GPa}, \nu_{12}=0.3, \rho=1389.23\text{Ns}^2/\text{m}^4.$$

Burada,  $E_i$ ,  $G_{ij}$ ,  $\nu_{12}$  ortotropik bir tabakanın sırasıyla elastisite modülünü, kayma modülünü ve Poisson oranını ifade etmektedir. Kirişin geometrik boyutları şu şekildedir:  $L=381\text{mm}$ ,  $h=b=25.4\text{mm}$ ,  $L/h=15$ . Tabaka sayısı 4 ve tabakaların dizilişi (0/90/90/0) şeklindedir (simetrik, çapraz-tabakalı). Doğal frekans değerleri  $\left[ \bar{\omega} = \omega L^2 \left( \rho / E_1 h^2 \right)^{1/2} \right]$  şeklinde

boyutsuzlaştırılmış ve Tablo 1 'de verilmiştir. Chandrasekhara ve diğ. [2] kompozit kirişin hareket denklemini birinci merteye kayma deformasyonu teorisini kullanarak elde etmişlerdir. Tablo 1 'de dördüncü mod aksel deformasyonla ilgili olup Kaynak [2]'de bu mod atlanmıştır. Eisenberger ve diğ. [10] tabakalı kirişin serbest titreşimlerini incelemek için birinci merteye kayma deformasyonu teorisini ile dinamik stifnes yöntemini; Yıldırım [11] ise birinci merteye kayma deformasyonu teorisini ile transfer matrisi yöntemini kullanmıştır.

Chakraborty ve diğ. [7] birinci-merteye kayma deformasyonu teorisine dayalı yeni bir tasfiye edilmiş sonlu eleman geliştirerek çalışmalarında bu modeli kullanmışlardır. Subramanian [8] serbest titreşim analizi için yüksek mertebeli deplasmana dayalı iki ayrı kayma deformasyonu teorisini ve bu teorilere dayanan sonlu elemanlar kullanmıştır. Tabloda görüldüğü gibi, çalışmamızda kullanılan yöntem ile elde edilen sonuçlar literatürde mevcut sonuçlarla çok iyi bir uyum sağlamıştır.

Ankastre-serbest, ankastre-ankastre ve ankastre-basit sınır şartları için hesaplanan frekanslar daha önceki gibi boyutsuzlaştırılmıştır. Simetrik çapraz-tabakalı (0/90/0) kirişlerin boyutsuz frekansları Tablo 2'de, anti-simetrik çapraz-tabakalı (0/90) kirişlerin boyutsuz frekansları Tablo 3'te görülmektedir.

Khdeir ve Reddy [3,9] Bernoulli-Euler klasik kiriş teorisini (KKT), birinci merteye kayma deformasyonu teorisini (BKDT), ikinci merteye kayma deformasyonu teorisini (İKDT), ve yüksek merteye kayma deformasyonu teorisini (YKDT) kullanarak Malzeme 2'den imal edilmiş kompozit kirişin doğal frekanslarını hesaplamışlardır. Yıldırım [11] ise doğal frekansları hesaplamak için transfer matrisi yöntemini kullanmıştır. Her iki tablodan da görüldüğü gibi, kayma deformasyonu etkilerini dikkate almayan klasik kiriş teorisini (Bernoulli-Euler) ile çok yüksek doğal frekans değerleri bulunmaktadır. Çalışmamızda kullanılan sonlu elemanlar yazılım paketinde bu etkiler dikkate alındığı için, diğer çalışmalarda bulunan sonuçlar ile çok uyumlu değerler elde edilmiştir.

**Tablo 1.** Çapraz-tabakalı grafüt-epoksi konsol kirişin (0/90/90/0) boyutsuz doğal frekanslarının karşılaştırılması

	Modlar				
	1	2	3	4	5
Kaynak [2]	0.9241	4.8920	11.4400	18.6972	26.2118
Kaynak [10]	0.924117	4.89253	11.4401	17.2591	18.6974
Kaynak [11]	0.921549	4.88318	11.4251	17.2070	18.6813
Kaynak [7]	0.925	4.9070	11.572	17.302	--
Kaynak [8]-1	0.9225	4.9209	11.5957	17.3237	19.0663
Kaynak [8]-2	0.9222	4.9212	11.5963	17.3237	19.0693
Bu çalışma	0.923796	4.90687	11.4897	17.2467	18.7891

İkinci örnek olarak seçilen kirişte de bütün tabakaların aynı kalınlık, yoğunluk ve ortotropik malzeme özelliklerine sahip olduğu kabul edilmiştir. Serbest titreşim analizinde kullanıla-

cak boyutsuz malzeme özellikleri (Malzeme-2) şöyledir:

$$E_1=40E_2, G_{12}=G_{13}=0.6E_2, G_{23}=0.5E_2, \nu_{12}=0.25$$

**Tablo 2.** Simetrik çapraz-tabakalı kirişin (0/90/0) boyutsuz doğal frekanslarının karşılaştırılması

L/h		Teori	Sınır şartları		
			Ankastre-serbest	Ankastre-ankastre	Ankastre-basit
5	Kaynak [3]	KKT	6.316	39.336	27.142
	Kaynak [3]	BKDT	4.134	10.432	9.652
	Kaynak [3]	YKDT	4.234	11.603	10.239
	Kaynak [11]	BKDT	4.13307	10.4311	9.65039
	Bu çalışma		4.14035	10.4325	9.66402
10	Kaynak [3,9]	KKT	6.310	39.931	27.527
	Kaynak [3,9]	BKDT	5.479	19.051	16.335
	Kaynak [3,9]	YKDT	5.495	19.712	16.599
	Kaynak [11]	BKDT	5.47604	19.0482	16.3310
	Bu çalışma		5.47964	19.0504	16.3444

**Tablo 3.** Anti-simetrik çapraz-tabakalı kirişin (0/90) boyutsuz doğal frekanslarının karşılaştırılması

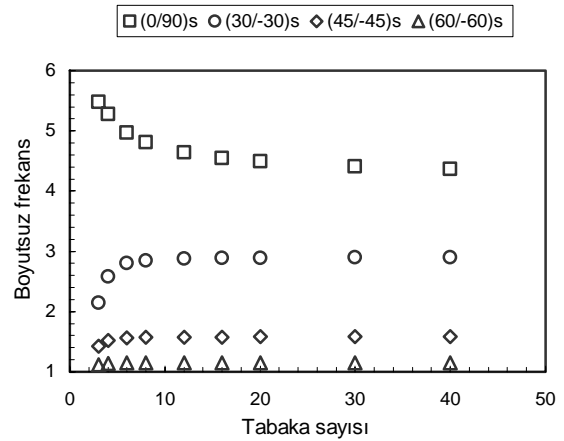
L/h		Teori	Sınır şartları		
			Ankastre-serbest	Ankastre-ankastre	Ankastre-basit
10	Kaynak [9]	KKT	--	16.450	11.342
	Kaynak [9]	BKDT	--	13.077	9.871
	Kaynak [9]	İKDT	--	12.947	9.788
	Kaynak [9]	YKDT	--	13.660	10.130
	Bu çalışma		2.5337	13.1011	9.8983

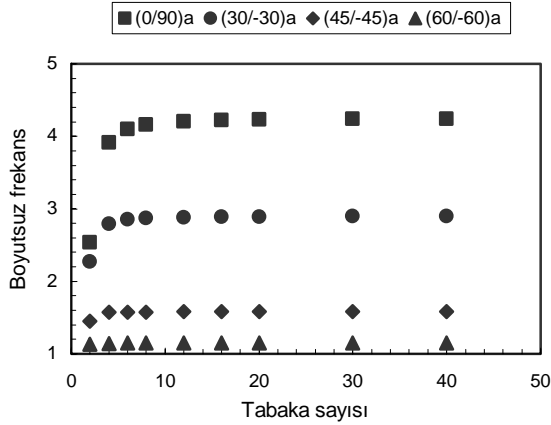
#### 4. Sayısal Çözüm

Bu bölümde, farklı özelliklere sahip simetrik ve anti-simetrik tabakalı kompozit kirişlerin doğal frekansları hesaplanarak, çeşitli parametrelerin doğal frekans üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

İlk olarak, tabaka sayısının kompozit kirişin doğal frekansına etkisi incelenmiştir. Bu amaçla, Malzeme-2 'den imal edilmiş boy/kalınlık oranı  $L/h=10$  olan bir kiriş seçilmiştir. Tabaka sayısı 2-3 ile 40 arasında değiştirilmiştir. Frekans değerleri yukarıda tanımlanan şekilde boyutsuzlaştırılmıştır. Eşit kalınlıklara sahip simetrik olarak dizilmiş tabakalardan oluşan kirişte tabaka sayısının 1.modun doğal frekansına etkisi Şekil 2a 'da, anti-simetrik olarak dizilmiş tabakalardan oluşan kirişte tabaka sayısının 1.modun doğal frekansına etkisi ise Şekil 2b'de görülmektedir. Simetrik çapraz-tabakalı kirişte tabaka sayısı arttıkça doğal frekans azalmakta, anti-simetrik çapraz-tabakalı kirişte ise artmaktadır. Açılı-tabakalı dizilişte her durumda tabaka sayısı arttıkça doğal frekans artmaktadır. Düşük tabaka sayılarında doğal frekans tabaka sayısı ve dizilişten çok etkilendiği halde, tabaka

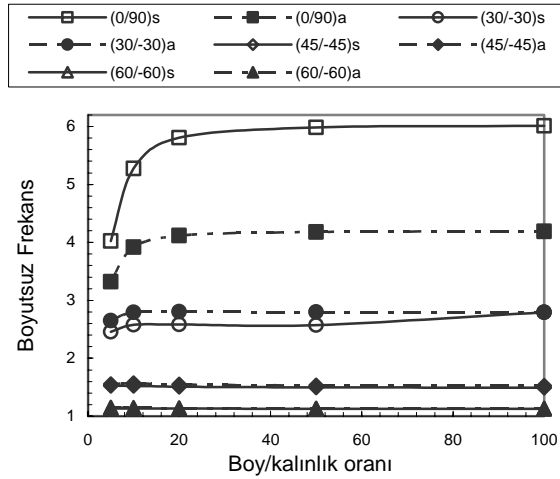
sayısı arttıkça doğal frekans fazla değişmemekte ve sabit bir değere doğru yakınsamaktadır.

**Şekil 2a.** Tabaka sayısının kompozit kirişin doğal frekansına etkisi. (Simetrik diziliş)



Şekil 2b. Tabaka sayısının kompozit kirişin doğal frekansına etkisi. (Anti-simetrik diziliş)

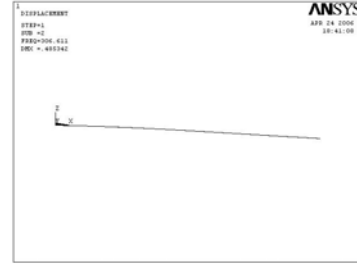
Boy/kalınlık (L/h) oranının doğal frekansa etkisi Şekil 3'te görülmektedir. Burada, Malzeme-2'den üretilmiş 4-tabakalı kirişin kalınlığı sabit tutulurken boyu değiştirilmiştir. (0/90/90/0) simetrik dizilişine sahip kirişte L/h oranı doğal frekansı büyük oranda etkilerken, (0/90/0/90) anti-simetrik kirişinde bu etki azalmakta, diğer dizilişlerde ise bu etki çok küçük olmaktadır. Boy/kalınlık oranı 20'yi geçtikten sonra doğal frekans fazla değişmemekte ve sabit bir değere yakınsamaktadır.



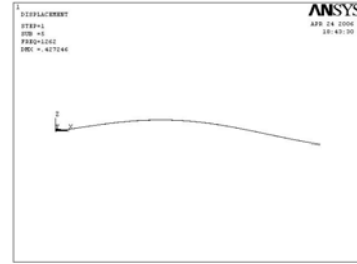
Şekil 3. Boy/kalınlık oranının kompozit kirişin doğal frekansına etkisi.

Tablo 4'te, Malzeme-2'den üretilmiş 4 tabakalı ve L/h=10 olan kompozit kirişte çeşitli diziliş açıları için ilk altı modun boyutsuz doğal frekansları görülmektedir. En yüksek doğal frekans değerleri (0/90) çapraz tabakalı kirişte görülmekte, sırasıyla (30/-30), (45/-45) ve (60/-

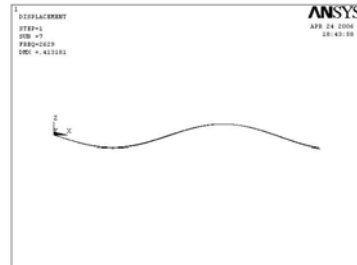
60) tabaka açılına sahip kirişlerde frekanslar düşmektedir. Doğal frekans, (0/90) çapraz-tabakalı kompozit kirişte simetrik diziliş durumunda; diğer açılı-tabakalı kirişlerde anti-simetrik diziliş durumunda yüksek çıkmaktadır.



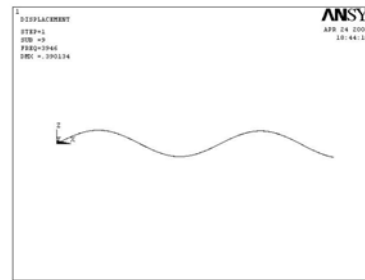
(a) Birinci mod



(b) İkinci mod



(c) Üçüncü mod



(d) Dördüncü mod

Şekil 4. (0/90/90/0) dizilişe sahip simetrik çapraz tabakalı kirişin ilk 4 moduna ait mod yapıları

**Tablo 4.** Dört tabakalı kompozit kirişte ilk altı modun boyutsuz frekansları

Diziliş	Modlar					
	1	2	3	4	5	6
(0/90/90/0)	5.276	21.724	45.230	67.897	90.493	112.542
(0/90/0/90)	3.916	18.542	40.726	63.482	86.605	109.151
(30/-30/-30/30)	2.578	14.032	33.483	55.594	79.078	102.476
(30/-30/30/-30)	2.793	14.991	35.132	57.686	81.109	105.006
(45/-45/-45/45)	1.524	9.030	23.424	41.711	62.473	84.600
(45/-45/45/-45)	1.570	9.255	23.904	42.453	63.354	85.612
(60/-60/-60/60)	1.135	6.886	18.363	33.808	52.067	72.190
(60/-60/60/60)	1.145	6.934	18.492	33.999	52.314	72.469

Şekil 4'te ise (0/90/90/0) dizilişe sahip simetrik çapraz tabakalı kirişin ilk 4 moduna ait mod yapıları görülmektedir.

## 5. Sonuç

Bu çalışmada çapraz-tabakalı ve açılı-tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizi, sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmıştır. Yaygın olarak karşılaşılan ankastre-serbest sınır şartları (konsol kiriş) için tabaka sayısının, boy/kalınlık oranının ve tabaka açısının düzlem-dışı eğilme titreşimi doğal frekansına etkileri araştırılmıştır. Simetrik ve anti-simetrik diziliş durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- a) Çalışmada kullanılan sonlu elemanlar modeli literatürde bulunanlarla çok uyumlu sonuçlar vermiştir; dolayısıyla güvenle kullanılabilir.

- b) Açılı-tabakalı kirişlerde, tabaka açısı arttıkça doğal frekans azalır.
- c) Simetrik çapraz-tabakalı dizilişte tabaka sayısı arttıkça doğal frekans azalmakta, anti-simetrik çapraz-tabakalı ve bütün açılı-tabakalı dizilişlerde ise artmaktadır.
- d) Çapraz-tabakalı kirişlerde simetrik diziliş durumundaki frekanslar anti-simetrik diziliş durumundakilerden daha yüksektir. Açılı-tabakalı kirişlerde ise aksi durum geçerli olmaktadır.
- e) Çapraz-tabakalı kirişlerde boy/kalınlık oranı arttıkça doğal frekans artmaktadır. Açılı-tabakalı kirişlerde ise boy/kalınlık oranının frekansa önemli bir etkisi olmadığı belirlenmiştir.

## Teşekkür

Bu çalışma Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından desteklenmiştir.

## 6. Kaynaklar

1. Singh, M.P. and Abdelnaser, A.S. (1992). Random response of symmetric cross-ply composite beams with arbitrary boundary conditions, *American Inst. Aeronautics Astronautics Journal*, **30** (4), 1081-1088.
2. Chandrashekhara, K., Krishnamurthy, K. and Roy, S. (1990). Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation, *Composite Structures*, **14**, 269-279.
3. Khdeir, A.A. and Reddy, J. N. (1994). Free vibration of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions, *Int. Journal Engineering Science*, **32**, 1971-1980.
4. Yıldırım, V., Sancaktar, E. and Kırıl, E. (1999). Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, **15**, 651-660.
5. Matsunaga, H. (2001). Vibration and stability of angle-ply laminated composite plates subjected to in-plane stresses, *Int. Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 1925-1944.
6. Yıldırım, V. and Kırıl, E. (2000). Investigation of the rotary inertia and shear deformation effects on the out-of-plane and torsional natural frequencies of laminated beams, *Composite Structures*, **49**, 313-320.

7. Chakraborty, A., Mahapatra, D. R. and Gopalakrishnan S. (2002). Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities, *Composite Structures*, **55**, 23-36.
8. Subramanian, P. (2006). Dynamic analysis of laminated composite beams using higher order theories and finite elements, *Composite Structures*, **73**, 342-353.
9. Khdeir, A.A. and Reddy, J.N. (1997). Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches, *International Journal of Solids Structures*, **34**, 1217-1234.
10. Eisenberger, M., Abramovich H. and Shulepov, O. (1995). Dynamic stiffness analysis of laminated beams using first order shear deformation theory, *Composite Structures*, **31**, 265-271.
11. Yıldırım, V. (2001). Common effects of the rotary inertia and shear deformation on the out-of-plane natural frequencies of composite circular bars, *Composites: Part B*, **32**, 687-695.